

**Демонстрационный вариант заданий для практической части  
предпрофессионального экзамена в рамках проекта  
«Академический класс в московской школе»  
на площадке РХТУ им. Д.И. Менделеева**

Направление практической части: Математика

**Прочитайте текст и выполните задания к нему.**

**Экономическая модель спроса и предложения**

**Определение 1.** Величина спроса – максимальное количество блага, которое потребители готовы приобрести по данной цене в определенное время в определенном месте.

*Закон спроса:* при прочих равных условиях, чем больше цена товара, тем меньше на него величина спроса.

**Определение 2.** Функцией спроса называется функция, которая ставит в соответствие цене товара величину спроса на него.

Согласно закону спроса, функция спроса убывающая по цене. Обозначим  $p$  - цена блага,  $q$  - величина спроса на него,  $q(p)$  - убывающая функция по переменной  $p$ .

При экономических исследованиях часто применяют понятие производной функции в точке в связи с тем, что производная – величина, показывающая чувствительность функции к изменениям аргумента. Чем больше изменение значения функции в точке при малом увеличении аргумента, тем больше значение производной функции в этой точке. При экономических исследованиях производную функции в точке используют, чтобы показать приближённо, на сколько единиц изменилось значение функции при увеличении аргумента на 1 единицу. Говорят, что производная функции показывает, какова скорость изменения функции.

Если рассматривать в качестве функции спроса дифференцируемую функцию, то условие убывания может быть выражено в виде неравенства  $q'(p) < 0$ .

*Производная функции спроса по цене показывает, на сколько единиц примерно изменится (уменьшится) величина спроса на благо при увеличении цены на 1 д.е.(денежную единицу).*

При увеличении цены величина спроса уменьшается. В этом случае происходит перемещение вдоль кривой спроса, сама же кривая спроса не изменяется.

**Пример 1.** Пусть  $q(p) = 50 - 5p$  - функция спроса. Цена на товар изменилась с 5 д.е. до 8 д.е. В результате величина спроса уменьшилась с 25 ед. до 10 ед.

**Определение 3.** Изменение спроса (а не величины спроса) – изменение, вызванное изменением неценовых факторов. В этом случае происходит сдвиг всей кривой спроса целиком на несколько единиц вдоль оси цен.

**Пример 2.** Пусть  $q(p) = 50 - 5p$  – функция спроса. После проведения рекламной кампании кривая спроса сдвинулась на 2 ед. вправо вдоль оси цен. Какова новая величина спроса при цене 5 д.е.?

Поскольку произошло смещение на 2 ед. вправо вдоль оси цен, то новая функция спроса имеет вид:

$q(p) = q(p - 2) = 50 - 5(p - 2) = 50 - 5p + 10 = 60 - 5p$ . Следовательно,  $q(5) = 60 - 5 \times 5 = 35$ (ед).

### **Неценовые факторы, влияющие на изменение самого спроса:**

- 1) Изменение (возрастание или убывание) доходов потребителей.
- 2) Поведение цены на дополняющие товары (например, карта памяти к видеокамере).
- 3) Поведение цены на товары – заменители.
- 4) Вкусы потребителей (например, пропаганда здорового образа жизни влияет на спрос к продукции предприятий быстрого питания).
- 5) Демографическая ситуация в стране.
- 6) Опубликованные прогнозы специалистов.

**Определение 4.** Величина предложения – максимальное количество блага, которое производители готовы предложить к продаже по данной цене в определенное время в определенном месте.

*Закон предложения:* при прочих равных условиях, чем больше цена блага, тем больше блага производители готовы предложить к продаже.

**Определение 5.** Функцией предложения называется функция, которая ставит в соответствие цене товара величину предложения на него.

Согласно закону предложения, функция предложения возрастающая по цене. Если  $p$  – цена блага,  $s$  – величина предложения на него,  $s = s(p)$  – возрастающая функция.

Если рассматривать в качестве функции предложения дифференцируемую функцию, то условие возрастания может быть выражено в виде неравенства  $s'(p) > 0$ .

*Производная функции предложения по цене показывает, на сколько единиц примерно изменится (увеличится) величина предложения на благо при увеличении цены на 1 д.е.*

При изменении величины предложения будет происходить перемещение вдоль кривой предложения, сама же кривая предложения не изменится. Если же меняется само предложение (вследствие неценовых факторов), то будет происходить сдвиг всей функции предложения вдоль оси цен на определенное количество единиц.

### **Неценовые факторы, влияющие на изменение предложения:**

- 1) Издержки производства (зарплата сотрудникам и т.д.)
- 2) Применение новых технологий

3) Прогнозы экономистов

4) Государственная политика (налоговая политика).

**Определение 6.** Равновесная цена – цена, при которой величины спроса и предложения одинаковы. Условимся обозначать равновесную цену через  $p^*$ .

### Эластичность функции, ее свойства и применение в экономике

*Точечная эластичность* – одна из дифференциальных характеристик функции, которая широко используется при анализе различных задач экономики, социологии и др. наук.

**Определение 7.** Эластичностью функции  $f$  по переменной  $x$  называется величина  $E_x(f) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$ , показывающая, на сколько процентов примерно изменяется значение функции при увеличении аргумента на 1%.

Поясним это.

Пусть задана некоторая дифференцируемая функция  $y = f(x)$ . Если при изменении аргумента  $x = x_0$  до  $x = x_0 + h$  значение функции изменилось от  $y = f(x_0)$  до  $y = f(x_0 + h)$ , то средний коэффициент эластичности функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_0, x_0 + h]$  вычисляется по формуле

$$AE = x_0 \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h f(x_0)}. \quad (1)$$

Этот коэффициент можно переписать в виде  $AE = \frac{\delta y \cdot 100\%}{\delta x \cdot 100\%}$ , где

$$\delta x \cdot 100\% = \frac{h \cdot 100\%}{x_0}$$

– относительный прирост аргумента  $x$ , полученный из условия, что  $x_0$  составляет 100%;

$$\delta y \cdot 100\% = \frac{(f(x_0 + h) - f(x_0)) \cdot 100\%}{f(x_0)}$$

– относительное изменение функции, соответствующее этому изменению аргумента (здесь  $f(x_0)$  принято за 100%). Поэтому средний коэффициент эластичности на отрезке  $[x_0, x_0 + h]$  показывает, на сколько процентов (в среднем) изменяется значение функции, если значение аргумента увеличивается на один процент.

**Определение 8.** Коэффициентом точечной эластичности функции  $f(x)$  называется предельное значение среднего коэффициента эластичности этой функции на отрезке  $[x_0, x_0 + h]$  при стремлении длины этого отрезка к нулю, что можно записать так:

$$E = \lim_{h \rightarrow 0} AE.$$

Это позволяет получить простую формулу для вычисления коэффициента точечной эластичности. Для этого перейдем в формуле (1) к пределу, устремив  $h$  к нулю:

$$E = \frac{x_0}{f(x_0)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{x_0 f'(x_0)}{f(x_0)}. \quad (2)$$

Итак, коэффициент точечной эластичности равен дроби, в числителе которой стоит произведение значений аргумента и производной, а в знаменателе – значение функции.

**Пример 3.** На сколько процентов изменится значение функции

$$f(x) = \frac{x}{x+2}$$

при увеличении аргумента на 1 %, если  $x = 2$  ?

Решение:

$$E_x(f) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{2}{x+2}$$

При  $x = 2$   $E_x(f) = 0.5$ , следовательно, значение функции увеличится на 0.5%.

**Свойства эластичности:**

- 1) Эластичность – величина безразмерная
- 2)  $E_x(f \cdot g) = E_x(f) + E_x(g)$
- 3) Если  $f$  возрастает, то  $E_x(f) > 0$ , если  $f$  убывает, то  $E_x(f) < 0$ .

**Эластичность некоторых элементарных функций**

- 1)  $E_x(x^\alpha) = \alpha$  - эластичность степенной функции;
- 2)  $E_x(a^x) = x \ln(a)$  - эластичность показательной функции;
- 3) эластичность линейной функции.

Рассмотрим теперь функции спроса  $q(p)$  и предложения  $s(p)$ , где  $p$  - цена блага. Согласно закону спроса, функция  $q(p)$  убывает, следовательно,  $E_p(q) < 0$ .

**Определение 9.**

1. Если  $E_p(q) < -1$ , то спрос называется эластичным. В этом случае при увеличении цены на 1 % величина спроса уменьшается более чем на 1 %.
2. Если  $E_p(q) > -1$ , то спрос называется неэластичным. В этом случае при увеличении цены на 1 % величина спроса уменьшается менее чем на 1 %.
- 3) Если  $E_p(q) = -1$ , то спрос называется нейтральным.

Если рассматривать функцию предложения  $s(p)$  и вычислять  $E_p(s)$ , то, аналогично функции спроса, можно заметить, что  $E_p(s) > 0$ .

**Определение 10.**

1. Если  $E_p(s) > 1$ , то предложение называется эластичным. В этом случае при увеличении цены на 1 % величина предложения увеличивается более чем на 1 %.
2. Если  $E_p(s) < 1$ , то предложение называется неэластичным. В этом случае при увеличении цены на 1 % величина предложения увеличивается менее чем на 1 %.

3. Если  $E_p(S) = 1$ , то предложение называется нейтральным.

**Определение 11.** Величину, описываемую формулой  $R = P \cdot Q(P)$ , называют выручкой продавцов. Здесь  $P$  - цена блага,  $Q(P)$  - величина спроса на него. Очевидно, что выручка продавцов численно равна расходам потребителей.

## ЗАДАНИЯ.

### I. Вопросы по тексту.

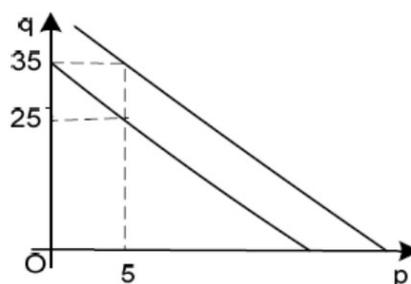
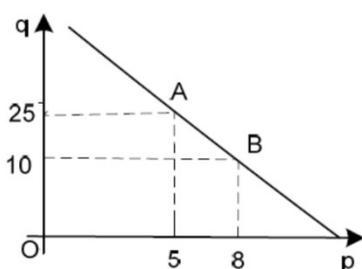
1. Почему в экономических исследованиях часто применяют понятие производной функции в точке?

2. Сформулируйте законы спроса и предложения.

3. Что показывает эластичность функции  $f$  по переменной  $x$ ?

4. Для примеров 1 и 2 представить геометрическую интерпретацию.

**Ответ:** в примере один произошло перемещение по линии спроса от точки А до точки В; в примере 2 произошло смещение линии спроса на 2 ед. вправо вдоль оси цен.



$$q(p) = \frac{4p}{p-4} ?$$

II. При какой цене спрос эластичен, если

**Решение.**

$$E_p(q) = \frac{p(p-4)}{4p} \cdot \frac{4(p-4) - 4p}{(p-4)^2} = -\frac{1}{p-4}.$$

Решим неравенство

$$-\frac{1}{p-4} < -1 \Leftrightarrow \frac{1}{p-4} > 1 \Leftrightarrow \frac{1-p+4}{p-4} > 0 \Leftrightarrow \frac{5-p}{p-4} > 0.$$

Последнее неравенство означает, что  $p \in (4; 5)$ .

**Ответ:**  $p \in (4; 5)$ .

**III.** Химическая лаборатория проводит широкий комплекс испытаний, измерений и исследований. Доля расходов на реактивы в бюджете этой лаборатории составляет 50%. Коэффициент эластичности  $b$  функции спроса на эти товары от дохода равен 0,8. Чему будет равна доля расходов на реактивы в бюджете химической лаборатории после повышения общих доходов лаборатории на 10% при условии постоянства цен? Принять, что функция спроса на химические реактивы имеет вид  $Q=A \cdot M^b$ , где  $A$  – постоянная,  $M$  – значение дохода.

**Решение задачи.**

Функция спроса на химические реактивы имеет вид  $Q=A \cdot M^b$ , где  $A$  – постоянная,  $M$  – значение дохода. Из условия постоянства цен  $P$  затраты на покупку реактивов равны  $X=P \cdot Q=P \cdot A \cdot M^b$ , откуда для доли расходов на химические реактивы в общем бюджете получаем:  $\frac{X}{M} = P \cdot A \cdot M^{b-1}$

Из этого равенства следует

$$\frac{X_1}{M_1} = P \cdot A \cdot M_1^{b-1}, \quad \frac{X_2}{M_2} = P \cdot A \cdot M_2^{b-1},$$

откуда получаем  $\frac{X_2}{M_2} = \frac{X_1}{M_1} \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{b-1}$ . По условию задачи,

$$\frac{X_1}{M_1} = 50\%, \quad \frac{M_2}{M_1} = (1 + a) = 1,1.$$

$$\text{Поэтому } \frac{X_2}{M_2} = 50\% (1 + a)^{b-1} = 50\% (1,1)^{-0,2} = 49,06\%$$

Итак, рост общих доходов химической лаборатории на 10% привел к росту потребления химических реактивов, однако доля расходов на их приобретение в общем бюджете сократилась с 50% до 49,06%.

**Ответ:** 49,06%.

## КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Максимальное количество баллов - 60

### 1. Вопросы по тексту. Максимально 12 баллов ( 4 вопроса по 3 балла максимально).

Критерии по каждому вопросу:

0 баллов - ответ не дан или дан строго неверно;

1 балл - ответ дан неполностью либо с существенными недостатками;

2 балла - ответ дан верно с несущественными погрешностями;

3 балла - ответ дан верно и полно.

### 2. Задание II. Максимально 24 балла:

0 баллов - нет идеи решения

1– 8 баллов - неверно получена эластичность функции спроса по цене;

9– 16 баллов - верно получена эластичность функции спроса по цене, но неверно составлено неравенство;

17– 23 баллов - верно получена эластичность функции спроса по цене, верно составлено неравенство, но допущена ошибка при его решении и дан неверный ответ;

24 балла - верно получена эластичность функции спроса по цене, верно составлено неравенство, правильно найдено его решение, дан верный ответ.

### 3. Задание III. Максимально 24 балла:

0 баллов - нет идеи решения

1 – 2 балла – есть рассуждения, не приводящие к математической модели;

3 – 8 баллов - получена математическая модель в виде формулы для доли расходов на химические реактивы в общем бюджете при условии постоянства цен, но нет её решения;

9 – 16 баллов - получена математическая модель в виде формулы для доли расходов на химические реактивы в общем бюджете при условии постоянства цен, но неправильно получена формула для доли расходов на

химические реактивы в общем бюджете после повышения общих доходов лаборатории при условии постоянства цен;

17 – 23 баллов - получена математическая модель в виде формулы для доли расходов на химические реактивы в общем бюджете при условии постоянства цен, правильно получена формула для доли расходов на химические реактивы в общем бюджете после повышения общих доходов лаборатории при условии постоянства цен, но допущена ошибка при использовании формулы и дан неверный ответ;

24 балла - получена математическая модель в виде формулы для доли расходов на химические реактивы в общем бюджете при условии постоянства цен, правильно получена формула для доли расходов на химические реактивы в общем бюджете после повышения общих доходов лаборатории при условии постоянства цен, проведен анализ и найден верный ответ.

**Тематическое содержание практической части предпрофессионального экзамена для академических (научно-технологических) классов на базе РХТУ имени Д.И. Менделеева**

**Направление практической части: Математика**

1. Тождественные преобразования числовых выражений. Преобразование рациональных и иррациональных алгебраических выражений.
2. Решение рациональных уравнений и систем рациональных уравнений. Решение рациональных неравенств и систем рациональных неравенств.
3. Решение иррациональных уравнений и систем иррациональных уравнений. Решение иррациональных неравенств и систем иррациональных неравенств.
4. Решение алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений. Решение алгебраических уравнений и систем алгебраических уравнений, содержащих переменную под знаком модуля. Решение алгебраических неравенств и систем алгебраических неравенств, содержащих переменную под знаком модуля.
5. Решение задач на арифметическую и геометрическую прогрессии.
6. Текстовые задачи на представление чисел, на движение, на работу, проценты.
7. Функция. Преобразование графиков.

8. Тригонометрические функции: определения, свойства, графики. Тождественные преобразования тригонометрических выражений. Решение тригонометрических уравнений. Решение тригонометрических уравнений и простейших тригонометрических неравенств.
9. Показательная функция: определение, свойства, график. Решение показательных уравнений и систем показательных уравнений. Решение показательных неравенств и систем показательных неравенств.
10. Логарифмическая функция: определение, свойства, график. Тождественные преобразования логарифмов. Решение логарифмических уравнений. Решение логарифмических уравнений и систем логарифмических уравнений. Решение логарифмических неравенств и систем логарифмических неравенств.
11. Предел функции. Производные элементарных функций и её применение. Правила дифференцирования. Решение задач на исследование свойств функции с помощью элементов математического анализа.
12. Решение задач с параметрами.
13. Решение геометрических задач: планиметрия. Прямоугольная декартова система координат на плоскости. Прямая на плоскости (построение прямой, точка пересечения двух прямых на плоскости, общее уравнение прямой, уравнение прямой с угловым коэффициентом). Расстояние между двумя точками. Середина отрезка. Углы. Многоугольники. Окружность и круг. Вписанные углы.
14. Решение геометрических задач: стереометрия. Многогранники. Прямоугольный параллелепипед. Призма. Цилиндр. Конус. Шар.
15. Векторы: определение, свойства, операции над векторами, скалярное произведение векторов и его приложения.